Zur Entwicklung der negativen Zahlen im Denken von Kindern

Günther Malle, Universität Klagenfurt

Die folgenden Ausführungen bilden einen kurzgefaßten Ausschnitt aus einer umfangreicheren Forschungsarbeit zu diesem Thema, die empirische und theoretische Teile enthält. Aus Platzgründen kann ich hier nur auf einige Aspekte eingehen und möchte den interessierten Leser auf den im Literaturverzeichnis angegebenen Artikel verweisen.

Es soll hier über *Interviews* berichtet werden, die ich mit drei zwölfjährigen Gymnasiasten (Bernd, Markus, Oswald), einem dreizehnjährigen Hauptschüler (Ingo) und einem vierzehnjährigen Hauptschüler (Mario) geführt habe. Die Interviews wurden in zwei Serien geführt; die erste Serie (mit Bernd, Markus und Oswald) dauerte etwa 7 Stunden, verteilt auf zwei Tage; die zweite Serie (mit Ingo und Mario) dauerte etwa 5 Stunden, verteilt auf zwei Halbtage. In den beiden Serien wurden zwei Varianten eines Lehrganges über negative Zahlen durchgearbeitet, die ich im folgenden nur so weit beschreiben möchte, als zum Verständnis der Interviews unbedingt nötig ist. Diese Interviews hatten explorativen Charakter. Es sollten mit ihnen nicht irgendwelche Hypothesen untermauert (oder gar mit statistischen Methoden getestet) werden, ich wollte lediglich meine Kenntnisse, meine Sensibilität und Phantasie in bezug auf Schülergedanken erweitern, soferne diese mit der Entstehung der negativen Zahlen sowie neuer Denkgegenstände überhaupt zusammenhängen.

1. Negative Zahlen als Markierungen auf Skalen

Die Symbole für negative Zahlen waren allen fünf Schülern bekannt, u.a. vom Thermometer her. Beide Interviewserien begannen mit Aufgaben, in denen diese Symbole als Markierungen auf Skalen verwendet wurden. Die von den Schülern geforderten Tätigkeiten waren dabei: Ablesen und Eintragen von Zahlenwerten auf Skalen, Darstellen und Interpretieren von Größen in Diagrammen und ähnliches. Diese Aufgaben bereiteten keinerlei Schwierigkeiten.

Anschließend stellte ich eine Reihe von Aufgaben, in denen *einfache Rechnungen* durchzuführen waren. Dabei ging es entweder um eine Größenbeziehung der Art

Ausgangszustand + Veränderung = Endzustand,

wobei von den drei Größen zwei gegeben und die dritte zu berechnen war, oder es wurde nach dem Unterschied zweier gegebener Größen gefragt. Zwei Beispiele:

1: Es hat am Abend 5 Grad unter Null. Durch einen Föhneinbruch steigt die Temperatur über Nacht um 12 Grad. Welche Temperatur hat es am Morgen?

2: Auf dem Mond hat es auf der Tagseite eine Temperatur von 130 Grad über Null, auf der Nachtseite eine Temperatur von 160 Grad unter Null. Wie groß ist der Temperaturunterschied zwischen Tag- und Nachtseite?

An dieser Stelle erläuterte ich den Schülern die Termini "positive Zahlen" und "negative Zahlen". (Der Terminus "ganze Zahlen" wurde in diesen Interviews nicht verwendet.)

Ich hatte vor, diese Aufgaben hauptsächlich durch Zeichnungen lösen zu lassen. Diese erwiesen sich jedoch als überflüssig. Die Schüler konnten die richtigen Antworten meist sofort geben. Man konnte beinahe glauben, daß die Schüler ein verinnerlichtes Modell der Zahlengeraden mit sich trugen, mit dem sie diese Aufgaben lösten. Verschiedene Beobachtungen wiesen jedoch darauf hin, daß dem nicht so ist. Während die Schüler nämlich die gestellten Aufgaben im allgemeinen intuitiv sofort lösen konnten, waren sie meist nicht imstande, die jeweilige Situation schematisch darzustellen und es bedurfte großer Mühe, die Darstellung auf der Zahlengeraden zu erarbeiten (die meisten Schüler schafften es erst nach einer größeren Anzahl von Aufgaben). Man kann daraus schließen, daß die Schüler zwar "abstrakte" Schemata zur Lösung solcher Aufgaben besaßen, diese aber mit großer Wahrscheinlichkeit nicht in visueller Form in ihrem Gedächtnis gespeichert hatten. Verschiedene Beobachtungen während der Interviews ergaben weiters, daß diese Schemata häufig ein abstraktes Wissen über "Lagen und Richtungen" enthielten, wobei der Terminus "Richtung" von den Schülern nicht nur im geometrischen, sondern durchaus in einem allgemeinen (metaphorischen) Sinn verstanden wurde und auch auf nichtgeometrische Situationen angewandt wurde wie etwa auf die Zeit oder auf Kontostände. Diese abstrakten "Lage- und Richtungsschemata" erwerben die Schüler wahrscheinlich schon vor ihrer Schulzeit durch Handlungen wie Vor- und Zurückgehen, vom ersten Stock in den Keller gehen usw.

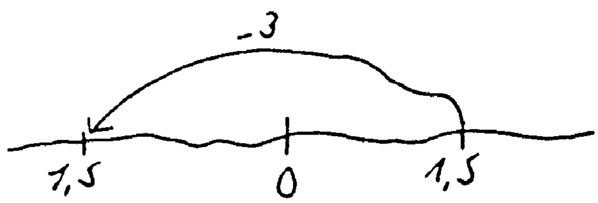
2. Negative Zahlen als bisherige Zahlen mit bestimmten Interpretationen

Zur Lösung der bisherigen Aufgaben braucht man nicht unbedingt negative Zahlen. Man kommt mit den bisherigen (positiven) Zahlen aus, vorausgesetzt man betrachtet deren Interpretationen. In den betreffenden Kontexten können die bisherigen Zahlen jeweils auf zweifache Weise interpretiert werden, wobei die beiden Interpretationen in einer gewissen Weise einander entgegengesetzt sind, z.B. über Null - unter Null, Guthaben - Schulden, nach Christus - vor Christus usw. Die Temperatur -5 Grad etwa bedeutet in diesem Stadium nichts anderes als 5 Grad, nur eben nicht über, sondern unter Null. Dies ist die Art, in der üblicherweise die negativen Zahlen im Alltagsleben verwendet werden; sie sind eigentlich noch keine eigenen Denkgegenstände, sondern die bisherigen (positiven) Zahlen in bestimmten Interpretationen. Formal könnte man eine negative Zahl in diesem Entwicklungsstadium als ein Paar (Zahl, Interpretation) darstellen, z.B. (100, Schuld), (106, vor Christus), (5, nach links) usw.

In der Tat verhielten sich alle Schüler in diesem Stadium der Interviews so, als würden sie negative Zahlen so auffassen. Es war jedoch zu beobachten, daß mit zunehmender Fähigkeit der schematischen Darstellung von Situationen auf der Zahlengeraden die Schüler immer weniger auf spezielle Interpretationen Bezug nahmen. Stattdessen verwendeten sie immer häufiger die Termini "plus" und "minus". Sie sprachen etwa von "100 Schilling minus" statt von "100 Schilling Schulden" oder von "106 minus" statt von "106 vor Christus" usw. Es war so, als ob sich aus den Paaren (Zahl, Interpretation) das gemeinsame Abstraktum (Zahl, Vorzeichen) gebildet hätte.

Allerdings ließen die Schüler keinen Zweifel darüber offen, daß für sie die Zahl die Hauptsache und die Interpretation bzw. das Vorzeichen die Nebensache war. Interpretationen wurden häufig als selbstverständlich mitgedacht und nicht eigens erwähnt. Die Vorzeichen ließen die Schüler meist weg oder schleppten sie als überflüssige oder manchmal sogar lästige Anhängsel mit sich. Der laxe Umgang mit den Vorzeichen war geradezu nervenaufreibend. Trotz meiner ständigen Ermahnungen ließen die Schüler bis zum Schluß der Interviews die Minuszeichen weg oder setzten sie ganz nach ihrem Belieben. Z.B. ging Markus bei der Rechnung $1,5 - 3$ so vor:

$1,5 - 3 = 1,5$



3. Addition einer positiven Zahl

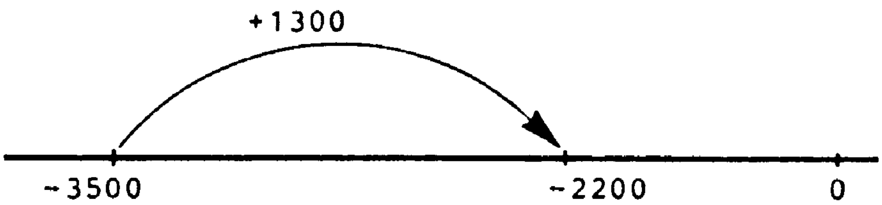
Die Addition bzw. Subtraktion ganzer Zahlen behandelte ich zunächst nur mit Bernd, Markus und Oswald. Ich unterschied zwei Fälle:

- Zu (von) einer beliebigen Zahl wird eine positive Zahl addiert (subtrahiert).
- Zu (von) einer beliebigen Zahl wird eine negative Zahl addiert (subtrahiert).

In diesem Abschnitt soll nur über den ersten Fall gesprochen werden. Die hier gestellten Aufgaben sollten größtenteils mithilfe der Punkt-Pfeil-Darstellung gelöst oder nachträglich veranschaulicht werden. Ein Beispiel:

3: Frau Hartmann hat ihr Konto überzogen und hat nun 3500 Schilling Schulden. Sie zahlt 1300 Schilling ein. Wie hoch ist der neue Kontostand?

Nach anfänglichen Schwierigkeiten, auf die ich erst später eingehe, gelang es allen Schülern, die Aufgabe 3 folgendermaßen darzustellen:



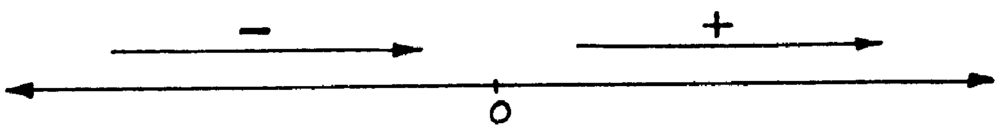
Die Übersetzung dieser Zeichnung in eine Rechnung fiel jedoch bei den einzelnen Schülern unterschiedlich aus:

Bernd:	-3500	+	1300	=	-2200
Markus:	3500	-	1300	=	2200
Oswald:	-3500	-	1300	=	-2200

Bei Markus und Oswald fällt auf, daß sie das bei dem Pfeil stehende Vorzeichen in der Rechnung umdrehen. Dieses Verhalten zeigten die beiden auch bei analogen Aufgaben, es handelt sich also um einen systematischen Fehler. Beim Ausgangs- und Endzustand setzten sie die Vorzeichen unterschiedlich und mehr oder weniger beliebig, das beim Pfeil stehende Vorzeichen drehten sie jedoch konsequent um.

Die Ursachen dieses Verhaltens können in Schwierigkeiten gesucht werden, die bei der Übertragung der *Ordnung* von positiven auf negative Zahlen auftreten. Das von mir angebotene Übertragungsprinzip haben alle Schüler sofort begriffen: a ist größer als b genau dann, wenn a auf der Zahlengeraden rechts von b liegt. Schwierigkeiten ergaben sich jedoch beim Anwenden durch die Auffassung von negativen Zahlen als bisherige Zahlen mit einer bestimmten Interpretation bzw. einem bestimmten Vorzeichen. So betrachtet ist nämlich -100 S ein kleinerer Schuldbetrag als -200 S, -3 Grad eine geringere Unter-Null-Temperatur als -5 Grad und -10 eine kleinere Minuszahl als -20.

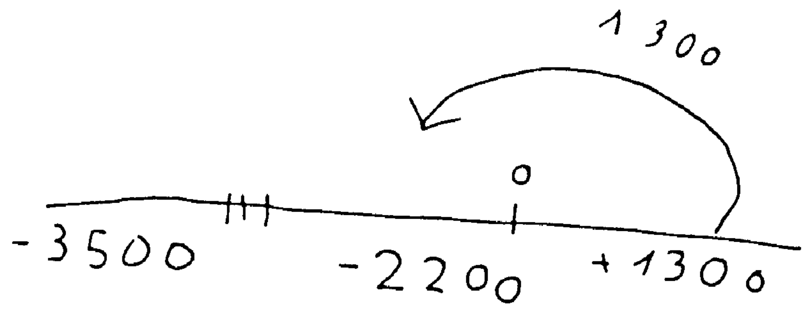
Die Schüler tendierten also dazu, positive und negative Zahlen spiegelbildlich zu-einander anzuordnen. Damit hängt zusammen, daß ein nach rechts weisender Pfeil im positiven Bereich als "Dazugeben", "Vermehren" oder ähnliches interpretiert und in eine Addition übersetzt wird, während ein nach rechts weisender Pfeil im negativen Bereich als "Wegnehmen", "Vermindern" oder ähnliches interpretiert und konsequenterweise in eine Subtraktion übersetzt wird (siehe folgende Figur).



Unterstützt wird diese Vorzeichenvertauschung noch dadurch, daß sie die tatsächlich durchgeführte numerische Rechnung wiedergibt. Bei -3500+1300 rechnet man ja in der Tat 3500-1300 und überlegt sich unabhängig davon das Vorzeichen des Resultates. Da aber, besonders bei größeren Zahlen, die numerische Rechnung die geistige Hauptarbeit darstellt und die Vorzeichenüberlegung weniger Aufwand erfordert und da — wie früher schon erwähnt — die Vorzeichen für die Schüler eine ganz unwichtige Rolle spielen, tendieren die Schüler zur Schreibweise 3500-1300 = 2200. Daß sie manchmal auch bei 3500 und 2200 ein Minuszeichen setzen, kann als eine Interferenz mit der Zeichnung oder den intuitiven Vorstellungen der Schüler erklärt werden. Hier sind sie nicht konsequent, da das Vorzeichen beim Ausgangs- und Endzustand für sie keine große Bedeutung besitzt.

Für die Schüler gab es also zwei miteinander konkurrierende Modelle der Ordnung ganzer Zahlen, auf der einen Seite die lineare Ordnung auf der Zahlengeraden, auf der anderen Seite die spiegelbildliche Anordnung der positiven und negativen Zahlen, verbunden mit unterschiedlichen Interpretationen der Addition und Subtraktion. Dies erzeugte Konflikte. Manchmal wirkten sich diese Konflikte dahingehend aus, daß sich die Schüler gegen negative Zahlen als Ausgangszustände wehrten, d.h. zu negativen Zahlen nichts addieren und von ihnen nichts subtrahieren wollten. Dementsprechend wehrten sie sich dagegen, auf der Zahlengeraden einen Pfeil von einer negativen Zahl ausgehen zu lassen. Nötigenfalls schafften sie sich selbst — meist durch eine Uminterpretation des Textes — einen positiven

Ausgangszustand. So entwarf Oswald zur Aufgabe 3 folgende Zeichnung:



In einer längeren Diskussion verteidigte er diese Zeichnung stereotyp mit der Begründung, daß Frau Hartmann die 1300 S ja *hat,* bevor sie diese einzahlt, bzw. von ihrem Konto abheben muß. Interessant ist, daß Oswald den Pfeil zwar mit 1300 beschriftet, aber nicht zum Nullpunkt, sondern zu dem vorher intuitiv errechneten Ergebnis -2200 führt. Ich habe leider während des Interviews nicht gefragt, ob ihm dieser Widerspruch aufgefallen ist. Ich glaube, daß er es bemerkt hat, aber der Wunsch von einem positiven Ausgangszustand zu -2200 zu gelangen war wahrscheinlich stärker. Daraus ist übrigens ersichtlich, daß Oswald nichts gegen eine negative Zahl als Endzustand hatte. Dies kann damit erklärt werden, daß mit dieser ja nicht mehr weiter operiert wird.

4. Addition einer negativen Zahl

Mit Bernd, Markus und Oswald habe ich versucht, die Formeln $a + (-b) = a - b$ und $a - (-b) = a + b$ unter Zuhilfenahme einer bestimmten Version des *Permanenzprinzipes* zu erarbeiten. Ich versuchte zuerst, den Schülern den definitorischen Charakter dieser Regeln klarzumachen, d.h. aufzuzeigen, daß es darum geht, die Ausdrücke $a + (-b)$ und $a - (-b)$ in möglichst zweckmäßiger Weise festzusetzen. Welche Festsetzungen zweckmäßig sind, überlegten wir uns an vielen Beispielen, u.a. an dem folgenden:

4: Zwei Kontostände x und y werden zusammengelegt. Man will haben, daß die Formel $G = x + y$ für den Gesamtkontostand auch gültig bleibt, wenn y negativ ist. Wie muß in diesem Fall die Summe einer positiven und einer negativen Zahl festgesetzt werden?

Bei der Durchführung dieses Programms ergaben sich jedoch einige Schwierigkeiten. Von Anfang an zeigte sich vehement ein *Sinnproblem:* Die Schüler hielten Schreibweisen wie $2 + (-5)$ für sinnlos und überflüssig. In allen bisher behandelten Anwendungskontexten (z.B. Zusammenlegen von Kontoständen, Absinken der Temperatur usw.) war es ja nicht nötig, $2 + (-5)$ zu schreiben, man konnte gleich $2 - 5$ schreiben. Die Schüler verstanden nicht, warum ich mich auf Schreibweisen wie $2 + (-5)$ oder $2 - (-5)$ kaprizierte. (Sie kannten ja nicht das Ziel, das ich im Auge hatte.)

Eine Ursache für die Ablehnung solcher Schreibweisen kann man wiederum darin sehen, daß die Schüler an der Auffassung der negativen Zahlen als bisherige Zahlen mit bestimmten Interpretationen und an den alten Deutungen der Rechenoperationen festhielten. Wird es mehr, wird der Vorgang in eine Addition übersetzt; wird es weniger, in eine Subtraktion. Kommt beispielsweise zum Kontostand 2 der negative Kontostand -5 hinzu, dann wird es weniger und der neue Kontostand ist somit $2 - 5$ und nicht $2 + (-5)$. Ist jemand 15 v. Chr. geboren und 50 n. Chr. gestorben, dann kommt zur Zeitspanne 15 die Zeitspanne 50 hinzu. Somit beträgt das Lebensalter dieses Menschen $15 + 50$ und nicht $50 - (-15)$, aufgefaßt als Differenz zweier Jahreszahlen. Die Schreibweisen der Schüler geben auch — bis auf etwaige Vorzeichenüberlegungen — die tatsächlich auszuführenden Rechnungen wieder.

Zusammenfassend kann das Verhalten dieser ersten Schülergruppe am Ende der Behandlung der Addition und Subtraktion ganzer Zahlen durch folgende Punkte charakterisiert werden:

- Auffassung der negativen Zahlen als bisherige Zahlen mit bestimmten Interpretationen (Vorzeichen)
- Festhalten am Rechnen mit positiven Zahlen und den alten Deutungen der Rechenoperationen
- Gelegentliche Abwehr von negativen Zahlen als Ausgangszustände
- Starke Abwehr von Schreibweisen wie $2 + (-5)$, $2 - (-5)$ usw.

Diese Punkte können als Indizien dafür aufgefaßt werden, daß diese Schüler in der

Bildung negativer Zahlen als eigene Denkgegenstände nicht sehr weit gekommen sind. Insgesamt also eine recht "negative" Zwischenbilanz.

5. Eine Alternative: Vorbereitung der Addition bzw. Subtraktion ganzer Zahlen durch Handlungen

Die schlechten Erfolge der ersten Schülergruppe machten mich stutzig. Ich versuchte dann mit der zweiten Schülergruppe (Ingo und Mario) einen alternativen Zugang zur Addition bzw. Subtraktion ganzer Zahlen. Den Zugang der ersten Schülergruppe kann man als einen vorwiegend "formalen" Zugang bezeichnen, bei dem die Addition und Subtraktion ganzer Zahlen vorwiegend auf der formal-symbolischen Ebene behandelt wurden und keine darüber hinausgehende Bedeutung des Plus- und Minuszeichens entwickelt wurde. Den Zugang der zweiten Schülergruppe kann man hingegen als einen vorwiegend "handlungsorientierten" Zugang bezeichnen, bei dem die Addition und Subtraktion ganzer Zahlen aus konkreten Handlungen heraus entwickelt wurden, wobei eine inhaltliche Bedeutung des Plus- und Minuszeichens auf dieser Handlungsebene entstand.

Mit Ingo und Mario ging ich so vor, daß wir etwa eine Stunde lang ein Spiel spielten, dessen Spielfeld aus einer Zahlengeraden bestand, die mit den ganzen Zahlen von -13 bis $+13$ beschriftet war. Jeder Spieler setzte am Anfang seinen Stein auf den Nullpunkt. Wir verwendeten einen schwarzen Würfel ("Pluswürfel") und einen roten Würfel ("Minuswürfel") und vereinbarten, daß die Augenzahl des schwarzen Würfels jeweils nach rechts und die des roten Würfels jeweils nach links gezogen wird. Wer am weitesten rechts landet, hat gewonnen. Wir spielten dieses Spiel in unterschiedlichen Varianten, die hier nicht im Detail beschrieben werden sollen. Die Schüler wurden stets aufgefordert, die gewürfelten Züge aufzuschreiben. Dies taten sie beispielsweise in folgender Form:

Ingo:

$4 + 4 = 8$
$4 + 4 = 8$
$-4 + -5 = -9$
$-1 + -4 = -5$
$-4 + 1 = -3$
$-6 + 5 = -1$

Mario:

$3 + 6 = 9$
$2 + 5 = \underline{7}$
$6 + 3 = \underline{-9}$
$5 + 1 = \underline{-6}$

$+4 - 3 = \underline{+1}$

Die Schüler bevorzugten also (wie die erste Schülergruppe) Schreibweisen der Form $a \pm b$ oder $\pm a \pm b$. Kein einziger kam auf die Idee, die Züge in der Form $(\pm a)+(\pm b)$ aufzuschreiben. Warum auch? Die andere Schreibweise ist einfacher und leistet dasselbe.

Inwieferne kann im Rahmen eines solchen Spiels eine Schreibweise wie etwa $(+5)+(-2)$ überhaupt sinnvoll werden? Eine Möglichkeit dazu besteht darin, Züge zu betrachten, über die man nicht genügend Informationen besitzt. Bezeichnet man die Augenzahlen der beiden Züge etwa mit a und b, so ist keine der Schreibweisen $+a+b, +a-b, -a+b, -a-b$ gerechtfertigt, weil man nicht weiß, in welche Richtungen die Züge auszuführen sind. Es ist daher in diesem Zusammenhang sinnvoll, stets $a+b$ zu schreiben, dafür aber die Addition als *Hintereinanderausführung von Handlungen* zu deuten und zuzulassen, daß a und b auch negative Werte annehmen dürfen, z.B. $(+5)+(-2)$. Ein solcher Ausdruck kann dann in folgender Weise gedeutet werden:

$$\underbrace{(+5)}_{\substack{\text{Zuerst 5}\\ \text{nach rechts}}} \quad \underbrace{\quad + \quad}_{\substack{\text{und}\\ \text{anschließend}}} \quad \underbrace{(-2)}_{\substack{\text{2 nach}\\ \text{links}}}$$

Die Bedeutung der Addition als Hintereinanderausführung von Handlungen ergibt sich hier dadurch, daß man anstelle konkreter Züge nur die *Form* des Gesamtzuges betrachtet. Dadurch wird nämlich die Aufmerksamkeit von den Richtungen der einzelnen Züge weggelenkt und auf eine neue Bedeutung des Pluszeichens hingelenkt. Zum Anschreiben dieser Form sind *Variable* wesentlich. Allerdings müssen diese nicht unbedingt als Buchstaben angeschrieben werden, sie können beispielsweise auch als Leerstellen irgendwelcher Art auftreten. Ingo und Mario legte ich z.B. Vordrucke folgender Art vor:

$$(\quad)+(\quad)+(\quad)+(\quad)$$

Beim Würfeln wurden die Augenzahlen der Reihe nach in die Klammern eingetragen, z.B.:

$$(+2)+(+4)+(-4)+(-5)$$

Als ich die Schüler fragte, wie man in einem solchen Vordruck zum Ausdruck bringen könnte, daß nicht der in einer Klammer stehende Zug, sondern sein Gegenteil ausgeführt werden soll, schlugen alle Schüler spontan vor, vor der Klammer ein Minus zu schreiben. Wir spielten dann mit unterschiedlichen Vordrucken, z.B.:

$$(\quad)-(\quad)-(\quad)+(\quad)$$

Anstelle der Klammern verwendeten wir dann auch Buchstaben als Variable. Die vier Züge wurden mit u, v, w, x bezeichnet, der Gesamtzug entsprechend den Vordrucken mit $u + v + w + x$, $u - v - w - x$ usw. Beim Einsetzen von Werten, etwa $u = +6$, $v = -3$, $w = -5$, $x = +1$, schrieben die Schüler ganz automatisch $(+6) + (-3) + (-5) + (+1)$; es kam kein einziges Mal vor, daß einer dafür die kürzere Schreibweise $+6 - 3 - 5 + 1$ wählte, was Bernd, Markus und Oswald beim Einsetzen in Terme meist machten.

In einem anschließenden, längeren Gespräch machten wir uns noch die unterschiedlichen Bedeutungen der Operations- und Vorzeichen bewußt.

6. Beobachtungen, die für den handlungsorientierten Zugang sprechen

Am Ende der vorhin beschriebenen Spielphase ließ ich Ingo und Mario die allgemeinen Ausdrücke $a + (-b), -a + (-b), a - (-b)$ und $-a - (-b)$ (mit $a, b > 0$) als Bewegungen auf dem Spielfeld interpretieren. Für mich ganz überraschend schrieben beide Schüler fast ohne jegliche Hilfe die Formeln

$$a + (-b) = a - b\,, \qquad -a + (-b) = -a - b\,,$$

$$a - (-b) = a + b\,, \qquad -a - (-b) = -a + b$$

an. Aus den dazugehörigen Gesprächen geht hervor, daß für sie die linke und die rechte Seite jeweils dasselbe besagten, nur einmal in der neuen und einmal in der alten Schreibweise. Der Zusammenhang war für sie so selbstverständlich, daß Mario ganz erstaunt fragte: " Ah, und das ist eine Formel?"

Anschließend stellte ich Ingo und Mario dieselben Aufgaben, bei denen Bernd, Markus und Oswald so schlecht abgeschnitten hatten, etwa die Aufgabe 3 (Kontoeinzahlung von Frau Hartmann). Ich muß gestehen, daß auch hier das Ergebnis frappierend war. Ingo und Mario entwarfen fast durchwegs richtige Pfeildarstellungen und übersetzten diese in Gleichungen, ohne auch nur ein einziges Mal die Vorzeichenvertauschung bei den Pfeilen durchzuführen, die für Markus und Oswald so typisch war.

Zusammenfassend kann man das Verhalten dieser zweiten Schülergruppe (Ingo, Mario) am Ende der Behandlung der Addition und Subtraktion ganzer Zahlen durch folgende Punkte charakterisieren:

- Auffassung der negativen Zahlen als Bewegungen
- Wenig Interferenzen zwischen dem Rechnen mit natürlichen Zahlen und dem Rechnen mit ganzen Zahlen
- Keine Abwehr von negativen Zahlen als Ausgangszustände
- Keine Abwehr von Schreibweisen wie $2 + (-5), 2 - (-5)$ usw.

Vergleicht man diese Zusammenfassung mit derjenigen für die erste Schülergruppe (am Ende von Abschnitt 4), so kann man sagen, daß die zweite Schülergruppe sich der ersten geradezu entgegengesetzt verhalten hat. Die angeführten Punkte sind Indizien dafür, daß diese zweite Schülergruppe in der Bildung der negativen Zahlen als eigene Denkgegenstände ein gutes Stück weiter gekommen ist als die erste.

7. Multiplikation ganzer Zahlen

Für die Multiplikation ganzer Zahlen kenne ich keine inhaltliche Bedeutung, die auf der Ebene der Deutung der Addition als "Hintereinanderausführung" liegt. Zwar kann man die Faktoren und das Produkt inhaltlich interpretieren, z.B. als Geschwindigkeit, Zeit und Weg (die alle positiv, null oder negativ sein können), die Multiplikation selbst erfährt dabei aber keine inhaltliche (physikalische) Interpretation, sondern ist eine bloß formale mathematische Operation.

Setzt man stillschweigend voraus, daß eine Formel wie

$$\text{Weg} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeit}$$

auch für negative Werte dieser Größen gültig bleibt, ergeben sich aus einer solchen Interpretation mehr oder weniger zwangsläufig die Vorzeichenregeln:

$$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b) \quad \text{und} \quad (-a) \cdot (-b) = -(a \cdot b) \qquad (a, b > 0)$$

Ein solches Vorgehen erscheint jedoch insoferne unredlich, weil eben nicht hinterfragt wird, ob die Formel auch für negative Werte der Größen gilt. Ein Vorgehen mit dem Permanenzprinzip in der früher beschriebenen Form scheint mir hier redlicher zu sein, d.h. zunächst den definitorischen Charakter von Formeln der Form

$$a \cdot (-b) = \ldots, \qquad (-a) \cdot b = \ldots, \qquad (-a) \cdot (-b) = \cdots$$

zu betonen und sich dann an geeigneten Beispielen zu überlegen, welche Festsetzungen garantieren, daß die betreffende Formel auch weiterhin gilt.

Die Multiplikation ganzer Zahlen habe ich nur mit der ersten Schülergruppe (Bernd, Markus und Oswald) behandelt. Ich ging dabei völlig analog zur Addition ganzer Zahlen vor. Nach einem Bewußtmachen des definitorischen Charakters von Formeln für $a \cdot (-b)$, $(-a) \cdot b$ und $(-a) \cdot (-b)$ überlegten wir uns an vielen Beispielen, welche Festsetzungen zweckmäßig sind, u.a. an dem folgenden:

5: Bewegt sich ein Aufzug mit der Geschwindigkeit 4m/s abwärts und befindet er sich zum Zeitpunkt 0 in der Höhe 0, so kann man seine Höhe zum Zeitpunkt t durch die Formel $h = -4 \cdot t$ bestimmen. Man will haben, daß diese Formel auch für negative t (vergangene Zeitpunkte) gültig bleibt. Wie ist in diesem Fall die Multiplikation zweier negativer Zahlen festzusetzen?

Bei der Durchführung dieses Programms zeigten sich keine besonderen Schwierigkeiten. Die Schüler operierten mit den negativen Zahlen in einer rein formalen Weise und zeigten keine Abneigung gegen Ausdrücke der Form $3\cdot(-5)$, $(-3)\cdot(-5)$ usw., was nach der vorhin gezeigten Abneigung gegen Ausdrücke der Form $3 + (-5)$, $3 - (-5)$ usw. zunächst überraschend wirkte. Man kann dafür aber zumindest drei Erklärungen geben. Zunächst gibt es bei $3 \cdot (-5)$ kein Ausweichen in eine "einfachere" Schreibweise wie etwa von $3 + (-5)$ zu $3 - 5$. Weiters kam es mangels inhaltlicher Vorstellungen für die Multiplikation kaum zu Interferenzen zwischen der Multiplikation ganzer Zahlen und derjenigen natürlicher Zahlen. Schließlich haben sich die Schüler vielleicht durch ihre intensive Auseinandersetzung mit der Addition ganzer Zahlen schon an das Rechnen mit ganzen Zahlen gewöhnt und dadurch Sinnlosigkeitsgefühle eher unterdrückt.

8. Theoretische Aspekte

Um auf einer theoretischen Ebene einigermaßen befriedigend erklären zu können, warum die zweite Schülergruppe (Ingo, Mario) in der Bildung der negativen Zahlen weiter gekommen ist als die erste (Bernd, Markus, Oswald), wäre ein tieferes Eindringen in die dazu entwickelten Theorien notwendig, was im Rahmen dieser Kurzfassung nicht geleistet werden kann. Ich beschränke mich daher darauf, auf einige theoretische Gesichtspunkte hinzuweisen.

Zumindest seit PIAGET wird versucht, die Entstehung neuer Denkgegenstände aus dem *Handeln* des Menschen mit bereits vorhandenen Gegenständen (bzw. Denkgegenständen) zu erklären. Im vorliegenden Fall geht es darum,die Entstehung der negativen Zahlen aus dem Handeln mit den bisherigen (positiven) Zahlen zu erklären. Skizzenhaft kann man unsere Vorstellungen von diesem Prozeß folgendermaßen beschreiben. Durch *Handeln* mit den bisherigen Zahlen entdeckt der Lernende *Beziehungen* (zwischen den bisherigen Zahlen sowie zwischen diesen Zahlen und anderen Objekten). Umgekehrt steuern solche Beziehungen seine Handlungen. Handlungen können dabei Handlungen mit materiellen Objekten sein oder solche, die bloß in unserer Vorstellung vollzogen werden (Handlungen mit Gedankenobjekten). Im allgemeinen löst sich der Lernende über kurz oder lang von den konkreten Handlungen und konkreten Beziehungen und bildet allgemeiner anwendbare *Handlungsschemata* und *Beziehungsschemata* (in denen beispielsweise die konkreten Zahlen keine Rolle mehr spielen). Die vielen Handlungs- und Beziehungsschemata, die im Verlauf des Lernens entstehen, werden dann durch diverse

Koordinationsvorgänge zu einem umfassenderen Schemanetz vereinigt, für welches — in Anlehnung an die Artificial Intelligence — auch der Terminus *Frame* gebräuchlich ist. Ein Frame besteht demnach aus einem umfassenden Netz von Handlungs- und Beziehungsschemata, die sich auf einen gewissen, relativ abgegrenzten (aber veränderbaren) Bereich beziehen. Im vorliegenden Fall könnte man den entstehenden Frame als "Frame der negativen Zahlen" bezeichnen. Allerdings enthält dieser Frame — was zunächst paradox erscheint — noch keine negativen Zahlen. Er enthält ja nur Handlungs- und Beziehungsschemata in bezug auf die bisherigen (positiven) Zahlen, deren Interpretationen (Schuld, Richtung usw.) sowie sonstige Zusammenhänge mit dem bereits vorhandenen Wissen des Subjekts. Damit ergibt sich die Kernfrage dieser Untersuchung: Wie entstehen innerhalb dieses Frames die negativen Zahlen als eigene Denkgegenstände?

Es spricht einiges für die Annahme, daß sich *Teilsysteme* des Frames *objektivieren,* d.h. sich gewissermaßen zu neuen punktuellen Objekten "zusammenziehen". Wir wissen allerdings weder, wie solche Objektivierungsvorgänge im Detail ablaufen noch wodurch sie letztlich ausgelöst werden.

Eines scheint sicher zu sein: Man kann derartige Objektivierungsvorgänge beim Lernenden nicht erzwingen. Insbesondere kann ein Lehrer nicht erzwingen, daß seine Schüler die negativen Zahlen als eigene Denkgegenstände bilden. Er kann jedoch *fördernde Maßnahmen* setzen, die den Schülern solche Objektivierungsvorgänge erleichtern, vor allem die folgenden:

(a) *Schematische Visualisierung:* Grundsätzlich erleichtert es die Objektivierung eines Systems, wenn eine *empirische Vorform* des zu bildenden Objekts vorliegt. Das ist bei Denkgegenständen wie beispielsweise "Kreis" oder "3/4" der Fall, weil der erste etwa durch eine Kartonscheibe und der zweite etwa durch einen bestimmten Teil einer Torte empirisch gegeben ist. In einem solchen Fall besteht die Schwierigkeit des Lernenden nicht darin, dem entsprechenden System Objektcharakter zu verleihen (es ist ja unzweifelhaft bereits ein Objekt), sondern darin, den empirischen Charakter dieses Objekts nach und nach durch einen theoretischen zu ersetzen, d.h. im Rahmen einer Theorie (Geometrie, Bruchrechnung) Handlungsund Beziehungsschemata aufzubauen, die den theoretischen Begriff "Kreis" bzw. "3/4" ausmachen. Fehlt jedoch eine solche empirische Vorform, wie es leider bei den negativen Zahlen der Fall ist, ist die Objektbildung ein schwieriger Prozeß. In einem solchen Fall ist es wichtig, daß an die Stelle der fehlenden empirischen Objekte schematische Visualisierungen treten, wie etwa Punkte, Strecken oder Pfeile auf der Zahlengeraden. Man beachte jedoch, daß Punkte, Strecken oder Pfeile negative Zahlen auf empirischem Weg allein nicht repräsentieren können, sondern daß dazu bestimmte theoretische (elementargeometrische) Beziehungen (Lage in bezug auf den Nullpunkt usw.) mitgedacht werden müssen.

(b) *Automatisierung:* Ein Teilsystem eines Frames kann durch fortschreitende Übung immer schneller durchlaufen werden, bis das Ganze schließlich so schnell abläuft, daß der "Prozeß" vom Subjekt mehr oder weniger als "Zustand" erlebt wird. Dies wird dadurch unterstützt, daß zeitlich aufeinanderfolgende Aufmerksamkeitsfokussierungen reduziert bzw. "zusammengeschoben" werden. So kann etwa das Ablesen eines Skalenwertes für ein Kind ein längerdauernder Prozeß sein, in dem es seine Aufmerksamkeit auf verschiedene Dinge fokussieren muß, den Nullpunkt, den entsprechenden Abschnitt und dessen Richtung, den Endpunkt und dessen Lage und vielleicht noch einiges mehr. Bei entsprechender Übung liest es jedoch den Skalenwert "mit einem Blick" ab, d.h. es fokussiert seine Aufmerksamkeit nur auf den Endpunkt. Diese Konzentration der Aufmerksamkeit auf einen "Punkt" begünstigt die Auffassung des betreffenden Teilsystems des Frames als Objekt. Der "Punkt" wird gewissermaßen zum "pars pro toto", zum Repräsentanten des ganzen Systems. Diese Bemerkungen weisen auf einen sinnvollen Einsatz des Übens hin (Üben als objektbildende Maßnahme).

(c) *Symbolisierung und Substantivierung:* Die Einführung von Symbolen (z.B. −5) und der Gebrauch von Substantiven oder substantivischer Wortgruppen (z.B. minus fünf, negative Zahl) unterstützen die Bildung eigener Denkgegenstände. Es ist etwas Wahres an der Auffassung: Wenn man nur lange genug über etwas redet, dann glaubt man daran. An dieser Stelle möchte ich auch die Rolle der *Kommunikation* unterstreichen. Die Mitteilung von Gedanken zwingt einen ja geradezu, gewisse Bestandteile eines Frames anzusprechen und wie Objekte zu behandeln.

(d) *Ausführung von Handlungen höherer Ordnung:* Objektivieren sich Teilsysteme eines Frames, so können mit diesen neuen Objekten wiederum Handlungen ausgeführt werden, die im Sinne von PIAGET als Handlungen höherer Ordnung bezeichnet werden können. Allerdings geht die Sache im allgemeinen nicht so vor sich, daß erst nach der Entstehung der Denkobjekte mit diesen gehandelt wird. Es können nämlich auch umgekehrt intendierte Handlungen stark zur Bildung der neuen Denkobjekte beitragen. Denn Handlungen oder Versuche, Handlungen auszuführen, setzen etwas voraus, mit dem gehandelt wird, und wenn dieses "etwas" im Denken noch nicht da ist, wird man geradezu gedrängt, dieses als Denkgegenstand zu bilden. Man kann im allgemeinen schwer sagen, was zuerst da ist, das neue Denkobjekt oder die mit ihm ausgeführten oder intendierten Handlungen, es ist wie mit der Henne und dem Ei.

Vergleicht man die Interviews mit der ersten Schülergruppe (Bernd, Markus, Oswald) mit jenen der zweiten Schülergruppe (Ingo, Mario), so kann man sagen, daß sich die Tätigkeiten der beiden Schülergruppen in Hinblick auf schematische Visualisierung, Automatisierung sowie Symbolisierung und Substantivierung nicht wesentlich unterschieden. Es gab jedoch einen Unterschied in Hinblick auf Handlungen höherer Ordnung. Diese wurden bei der zweiten Schülergruppe wesentlich stärker betont. Ingo und Mario wurden nämlich dazu angehalten, Summen bzw. Differenzen von ganzen Zahlen in folgender Weise zu interpretieren:

$$\underbrace{(+5)}_{\substack{\text{5} \\ \text{nach rechts}}} \quad \underbrace{+}_{\substack{\text{und} \\ \text{anschließend}}} \quad \underbrace{(-2)}_{\substack{\text{2 nach} \\ \text{links}}}$$

Das Additionszeichen + in der Mitte symbolisiert eine Handlung höherer Ordnung, welche sich auf die beiden durch die Klammerausdrücke symbolisierten Handlungen niedrigerer Ordnung bezieht und darin besteht, deren Abfolge zu organisieren. Analoges gilt für ein Subtraktionszeichen in der Mitte. Da derartige Interpretationen mit Ingo und Mario relativ gründlich durchgeführt wurden, gaben diese Handlungen höherer Ordnung einen merkbaren Anstoß, die Handlungen niedrigerer Ordnung zu negativen Zahlen zu objektivieren ("negative Zahl als Bewegung").

Auf eine weitere theoretische Erklärungsmöglichkeit sei noch kurz hingewiesen. Der Lernprozeß der zweiten Schülergruppe läßt sich — von der verwendeten Symbolik her betrachtet — kurz durch die folgenden drei Stadien charakterisieren:

(1) $5-3$ (2) $a+b$ (3) $(+5)+(-3)$

Beim Übergang von (1) zu (2) geschah eine charakteristische *Verschiebung der Aufmerksamkeitsfokussierung*. Die Aufmerksamkeit der Schüler mußte von den einzelnen Spielzügen (5 nach rechts, 3 nach links) in (1) weggelenkt und auf eine neue Bedeutung des Pluszeichens (Hintereinanderausführung von Zügen) in (2) hingelenkt werden. Anschließend wurde erst zu (3) übergegangen. Mit der ersten Schülergruppe wurde jedoch ein direkter Weg von (1) nach (3) versucht und dieser hat nicht funktioniert. Warum? Erinnern wir uns, daß Schreibweisen wie $(+5)+(-3)$ zunächst allen Schülern als mehr oder weniger sinnlos erschienen. Die Sperre zeigte sich an der Symbolik, es läßt sich aber mit einer gewissen Plausibilität zurückverfolgen, woher dieser Widerstand stammt. Er resultiert zunächst aus dem Fehlen einer Bedeutung des Pluszeichens zwischen den Klammern. Eine solche Bedeutung konnten die Schüler aber deshalb nicht konstruieren, weil die dazu nötige Verschiebung der Aufmerksamkeitsfokussierung (von den konkreten Zahlen zur Operation) nicht vollzogen wurde. Und hier liegt die Ursache! Eine solche Verschiebung war in den angegebenen Kontexten nicht notwendig und deshalb stoppte der Verallgemeinerungsprozeß genau an dieser Stelle. Auch die zweite Schülergruppe hatte zunächst im Rahmen ihrer Spielsituation diese Schwierigkeit. Variable erschienen hier wie Retter in der Not. Sie *zwangen* die Schüler zu dieser Verschiebung der Aufmerksamkeitsfokussierung. Und in der Tat verlief der Rest des Verallgemeinerungsprozesses bei dieser Schülergruppe dann ohne größere Schwierigkeiten.

Diese Ideen können zu einer Abstraktions- und Verallgemeinerungstheorie ausgebaut werden, auf die hier nicht eingegangen werden kann.

Literatur

MALLE, G (1987): Die Entstehung neuer Denkgegenstände — untersucht am Beispiel der negativen Zahlen. In: DÖRFLER, W. (Hrsg.): Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 16, S. 259–320. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, und B.G. Teubner, Stuttgart.